



MODELOS LINEARES MISTOS COMO FERRAMENTA ESTATÍSTICA PARA ANÁLISE DO ÍNDICE DE DESEMPENHO DOS MUNICÍPIOS DO ESTADO DE GOIÁS

MIXED LINEAR MODELS AS STATISTICAL TOOL FOR THE ANALYSIS OF THE MUNICIPALITIES PERFORMANCE INDEX OF GOIÁS

MODELOS LINEALES MIXTOS COMO HERRAMIENTA ESTADÍSTICA PARA EL ANÁLISIS DEL ÍNDICE DE DESEMPEÑO DE LOS MUNICIPIOS DE GOIÁS

Pedro Araújo Pietrafesa¹

Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva²

José Paulo Pietrafesa³

RESUMO

O objetivo deste trabalho é realizar reflexão sobre a aplicação dos Modelos Lineares Mistos para a análise do Índice de Desempenho dos Municípios (IDM) do Estado de Goiás para os anos de 2012, 2014, 2016 e 2018. Para isso realizamos uma revisão da literatura acerca de Modelos Lineares Mistos, bem como do contexto que permeou a aplicação do modelo que diz respeito a situação socioeconômica dos municípios goianos nos anos selecionados. Além da revisão bibliográfica, foram coletados dados no Banco de Dados Estatísticos de Goiás do Instituto Mauro Borges. Os resultados indicaram que os modelos lineares mistos modelaram adequadamente os efeitos das covariáveis no IDM. Conclui-se que em base de dados nas quais as mesmas unidades experimentais são coletadas mais de uma vez, há necessidade de modelagem estatística que consiga captar as variações entre os agrupamentos e dentro dos agrupamentos. Desta forma, na análise do IDM, as variáveis equilíbrio orçamentário, PIB per capita, infraestrutura de telefone e internet, distribuição de médicos por mil habitantes e emprego formal tiveram impactos positivos no Índice de Desempenho dos Municípios goianos. Por outro lado, número de matrículas em unidades escolares impactou negativamente o IDM.

Palavras-chave: Modelos Lineares Mistos. Índice de Desempenho dos Municípios Goianos. Desenvolvimento Regional. Dados Longitudinais.

¹Doutor em Ciências Sociais pelo Centro de Pesquisa e Pós-Graduação sobre as Américas da Universidade de Brasília. Mestrado em Desenvolvimento e Planejamento Territorial da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Goiânia. Goiás. Brasil. E-mail: pedro.pietrafesa@pucgoias.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0542-4753>.

²Doutora e pós-doutora em Estatística pela Universidade de São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia. Goiás. Brasil. E-mail: tmelo@ufg.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5035-2280>.

³Doutor em Sociologia pela Universidade de Brasília. Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Goiás. Goiânia. Goiás. Brasil. E-mail: jose_pietrafesa@ufg.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7622-1032>.

ABSTRACT

The objective of this paper is a methodological discussion regarding the application of Mixed Linear Models for the analysis of the Municipalities Performance Index (IDM) of Goiás for the years 2012, 2014, 2016 and 2018. Thereby, it was performed a literature review about of Mixed Linear Models, as well it was described the context that permeated the application of the model that concerns the socioeconomic situation of the cities of Goiás in the selected years. In addition to the literature review, data were collected from Instituto Mauro Borges Statistical Database of Goiás. The results indicated that the mixed linear models adequately modeled the effects of covariates on the IDM. It is concluded that in database which the same experimental units are collected more than once, there is a need for statistical modeling that can capture variance between and within groups. Thus, in the analysis of the IDM, the variables budget balance, GDP per capita, telephone and internet infrastructure, distribution of doctors per thousand inhabitants and formal employment had positive impacts on the Municipalities Performance Index of Goiás. On the other hand, enrollment in school units negatively impacted the IDM.

Keywords: Mixed Linear Models. Municipalities Performance Index of Goiás. Regional development. Longitudinal Data.

RESUMEN

El objetivo de este artículo es realizar una discusión metodológica sobre la aplicación de Modelos Lineales Mixtos para el análisis del Índice de Desempeño de los Municipios (IDM) en Goiás para los años 2012, 2014, 2016 y 2018. Para ello, dirigió una revisión de la literatura sobre Modelos Lineales Mixtos, así como el contexto que permeó la aplicación del modelo que concierne a la situación socioeconómica de los municipios de Goiás en los años seleccionados. Juntamente con la revisión de la literatura, se recolectaron datos de la Base de Datos Estadística de Goiás del Instituto Mauro Borges. Los resultados indicaron que los modelos lineales mixtos modelaron adecuadamente los efectos de las covariables en IDM. Se concluye, con base de datos en que se recopilan las mismas unidades experimentales más de una vez, existe la necesidad de un modelo estadístico que pueda capturar variaciones entre y dentro de los grupos. Así, en el análisis del IDM, las variables saldo presupuestario, PIB per cápita, infraestructura de telefonía e internet, distribución de médicos por mil habitantes y empleo formal tuvieron impactos positivos en el Índice de Desempeño de los Municipios de Goiás. Por otro lado, el registro en las unidades escolares afectó negativamente el IDM.

Palabras clave: Modelos lineales mixtos. Índice de Desempeño de los Municipios de Goiás. Desarrollo regional. Datos Longitudinales.

Como citar este artigo: PIETRAFESA, Pedro Araújo; SILVA, Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da; PIETRAFESA, José Paulo. Modelos lineares mistos como ferramenta estatística para análise do índice de desempenho dos municípios do estado de Goiás. **DRd - Desenvolvimento Regional em debate**, v. 12, p. 167-186, 01 abr. 2022. DOI: <https://doi.org/10.24302/drd.v12.3998>

Artigo recebido em: 02/10/2021

Artigo aprovado em: 07/12/2021

Artigo publicado em: 01/04/2022

1 INTRODUÇÃO

Para analisar o comportamento socioeconômico de municípios ao longo do tempo, muitos estudos na área de desenvolvimento regional utilizam dados longitudinais (SOUZA; TEIXEIRA; TUPY, 2021), nos quais os elementos dentro das unidades experimentais, os municípios, são observados mais de uma vez. Os dados para modelos mistos possuem uma estrutura mais complexa, multi-nível e hierárquica. As observações entre os níveis ou agrupamentos de observações são independentes, mas as observações dentro de cada agrupamento são dependentes, pois pertencem ao mesmo município. Assim, quando nos referimos aos dados com medidas repetidas, aludimos a dois tipos de variação. A primeira, entre os agrupamentos e a segunda, dentro dos agrupamentos (MELO, 2009).

As análises com medidas repetidas têm como foco a modelagem da correlação dentro dos agrupamentos. Foi com essa preocupação que Laird e Ware (1982) e Ware (1985) propuseram a utilização dos modelos lineares mistos (NOBRE, 2004). Assim, por meio deste método é possível fazer predição de efeitos aleatórios com a presença dos efeitos fixos.

O modelo misto é adequado para pesquisas com dados longitudinais com multidimensionalidade dos parâmetros, congregação complexa de observações e múltiplas fontes de variações (DEMIDENKO, 2004), combinando dados transversais e de séries temporais, o que permite o controle da heterogeneidade das unidades observadas (DUARTE; LAMOUNIER; TAKAMATSU, 2007).

O objetivo deste artigo é realizar uma análise quanto a aplicação dos Modelos Lineares Mistos para a análise do Índice de Desempenho dos Municípios (IDM) goianos para os anos de 2012, 2014, 2016 e 2018, no sentido de ampliar o debate em relação as ferramentas estatísticas disponíveis aos pesquisadores do campo acadêmico do desenvolvimento regional. Assim, foi observado o comportamento do Índice de Desempenho dos Municípios (IDM) do estado de Goiás para os anos 2012, 2014, 2016 e 2018 em função das seguintes covariáveis: equilíbrio orçamentário dos municípios, PIB per capita, número de matrículas escolares, cobertura da rede de telefonia fixa e internet, médicos por habitantes na rede SUS e empregos formais.

No segundo trimestre de 2014 a economia brasileira entrou formalmente em recessão, dando sinais de recuperação somente a partir de 2017 (BARBOSA, 2017). A crise econômica, de acordo com Barbosa (2017), ocorreu, principalmente, por três fatores: (i) esgotamento da Nova Matriz Econômica implementada desde 2011/2012; (ii) problemas de gestão quanto ao crescimento da dívida pública doméstica e (iii) correção da política tarifária por meio de política monetária contracionista para o controle da inflação.

Neste cenário de crise, tanto estados quanto municípios também tiveram consequências econômicas, com intensidades diferentes. O que é explicado pelas dimensões continentais do Brasil e as estruturas das economias de cada Unidade da Federação. Neste período, o estado de Goiás teve uma queda acumulada de 8,2% do valor do PIB, empatado com o Ceará na nona posição de estados com maiores perdas (CALEIRO, 2018).

No que se refere aos municípios, a recessão ocasionou o retrocesso no desenvolvimento municipal brasileiro de pelo menos três anos, segundo estudo da Federação da Indústria do Rio de Janeiro (FIRJAN, 2018). Desta forma, a análise sobre o desempenho dos municípios goianos entre 2012 e 2018 contribui para o diagnóstico das condições em que a esfera municipal de Goiás perpassou o período mais intenso da crise econômica de 2014. As informações acerca do

Índice de Desempenho dos Municípios disponibilizadas pelo Instituto Mauro Borges (IMB) foram a base para a construção do banco de dados deste trabalho, por terem continuidade temporal e estabilidade de procedimentos na coleta das informações. As covariáveis também foram coletadas no Banco de Dados Estatísticos de Goiás (BDE) do IMB.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 o modelo linear misto é apresentado com a definição e estimação dos parâmetros por Máxima Verossimilhança e Máxima Verossimilhança Restrita bem como os critérios de seleção de modelos utilizados neste trabalho. Adicionalmente, na Seção 3, expõe a aplicação do modelo na análise do Índice de Desempenho dos Municípios do Estado de Goiás. E por último, na Seção 4, as considerações finais do trabalho.

2 DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLOGIA SOBRE APLICAÇÃO DOS MODELOS LINEARES MISTOS

Nesta seção, os pressupostos que caracterizam o modelo misto é apresentado, bem como a forma de seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados que foram coletados pela pesquisa. Após esta exposição, é realizada a análise longitudinal do Índice de Desempenho dos Municípios do Estado de Goiás.

Verbeke e Molenberghs (2000) definem o modelo linear misto por:

$$Y_i = X_i\beta + Z_i b_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Sendo,

- Y_i é um vetor n -dimensional de respostas da i -ésima unidade experimental;
- X_i é uma matriz ($n_i \times p$) das variáveis explicativas (efeitos fixos);
- β é um vetor p -dimensional de parâmetros desconhecidos (coeficientes dos efeitos fixos);
- Z_i é uma matriz ($n_i \times q$) dos efeitos aleatórios;
- ε_i é o erro com componentes independentes;
- b_i é um vetor ($q \times 1$) dos efeitos aleatórios com média zero matriz de covariância D .

Por suposição, assumimos que os vetores aleatórios b_i e ε_i sejam mutualmente independentes, com distribuição $\varepsilon_i \sim N_{n_i}(0, \Sigma_i)$ e $b_i \sim N_q(\mathbf{0}, D)$. A variável Y_i tem distribuição $N(X_i\beta + Z_i b_i, \Sigma_i)$. A matriz $D = D(\theta)$, de dimensão ($q \times q$), representa a variação entre as unidades experimentais. Aqui, θ é um vetor ($t \times 1$) de parâmetros

desconhecidos. A matriz $\Sigma_i = \Sigma_i(\boldsymbol{\theta})$, de dimensão $(n_i \times n_i)$, diz respeito a variação dentro das unidades experimentais. As matrizes \mathbf{D} e Σ_i são simétricas e positivas definidas.

Singer, Nobre e Rocha (2018) escrevem o modelo $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$ na forma matricial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

- $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top, \dots, \mathbf{Y}_n^\top)^\top$ é um vetor $(N \times 1)$, sendo $N = \sum_{i=1}^n n_i$, em que n representa as unidades amostrais e n_i as observações associadas à i -ésima unidade amostral;
- $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top)^\top$ uma matriz de dimensão $(N \times p)$;
- $\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}_i$ uma matriz com dimensão $(N \times nq)$, sendo \bigoplus a soma direta dos \mathbf{Z}_i 's. A soma direta de matrizes é um tipo especial de matriz por blocos. Neste caso, $\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}_i = \text{diag}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n\}$;
- $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1^\top, \mathbf{b}_2^\top, \dots, \mathbf{b}_n^\top)^\top$ é um vetor dos efeitos aleatórios com dimensão $(nq \times 1)$;
- $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top, \boldsymbol{\varepsilon}_2^\top, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^\top)^\top$ é o erro com vetor de dimensão $(N \times 1)$.

Assim como no modelo $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, \mathbf{b} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são independentes, com $\mathbf{b} \sim N_{nq}(\mathbf{0}, \Gamma(\boldsymbol{\theta}))$, onde $\Gamma(\boldsymbol{\theta}) = I_n \otimes \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$. O símbolo \otimes representa o produto de Kronecker. Além disso, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_N(0, \Sigma(\boldsymbol{\theta}))$, com $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma_i(\boldsymbol{\theta})$. Portanto,

$$\mathbf{Y} \sim N_N(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})), \quad (3)$$

Em que,

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Z}\Gamma(\boldsymbol{\theta})\mathbf{Z}^\top + \Sigma(\boldsymbol{\theta})$$

Os componentes do erro são não correlacionados, os efeitos fixos modelam o valor esperado de \mathbf{Y} e os aleatórios modelam a estrutura de covariância (NOBRE, 2004). Há diferentes métodos de estimação dos parâmetros da equação $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, entre eles o Bayesiano, de Máxima Verossimilhança, de Máxima Verossimilhança Restrita e Mínimos Quadrados (NOBRE, 2004). Neste trabalho, vamos utilizar o método de verossimilhança e verossimilhança restrita.

2.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS EFEITOS FIXOS E PREDIÇÃO DOS EFEITOS ALEATÓRIOS

A estimação dos parâmetros por meio do Método da Máxima Verossimilhança se refere na maximização da função do logaritmo da verossimilhança marginal dos dados (SINGER; NOBRE; ROCHA, 2018; YAMANOUCHI, 2017). Temos que \mathbf{Y} segue distribuição normal multivariada com seguinte função de probabilidade:

$$f(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})} \quad (4)$$

Assim, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})} \quad (5)$$

O logaritmo da função de verossimilhança corresponde a

$$l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})|) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (6)$$

Derivando a equação acima em relação a $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero, temos

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{y}. \quad (7)$$

Segundo Singer, Nobre e Rocha (2018), o método de máxima verossimilhança, gera um estimador não-viesado para os efeitos fixos, denominado de “Melhor Estimador Linear Não Viesado” (*BLUE*) de $\boldsymbol{\beta}$. O vetor $\boldsymbol{\theta}$ presente em $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$ é desconhecido, então precisamos encontrar a estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para $\boldsymbol{\theta}$. Podemos encontrar $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ substituindo $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$ na equação (6), obtendo a função de log-verossimilhança perfilada $l(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta})$. Em seguida, derivamos a função log-verossimilhança perfilada em relação a $\boldsymbol{\theta}$, e igualamos a um vetor de zeros. O resultado corresponde ao estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$. Substituindo $\boldsymbol{\theta}$ em (7), encontramos o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\beta}$ (SINGER; NOBRE; ROCHA, 2018; YAMANOUCHI, 2017).

As estimativas de máxima verossimilhança produzem estimadores viesados em relação aos parâmetros da matriz de covariâncias intra-unidades das observações amostrais, pois não leva em consideração a perda de graus de liberdade na estimação dos efeitos fixos (SINGER; NOBRE; ROCHA, 2018). Para reduzir o viés no componente da variância, autores como

Patterson e Thompson (1971) e Harville (1977) propuseram modificar a função de log-verossimilhança utilizando os resíduos dos mínimos quadrados generalizados, denominado pelos autores de “Estimação de Máxima Verossimilhança Restrita”. Laird e Ware (1982) aplicaram esse método nos modelos mistos (DEMIDENKO, 2004).

Patterson e Thompson (1971) propuseram o método de máxima verossimilhança restrita, que consiste na maximização da verossimilhança da transformação linear ortogonal, $\mathbf{y}^\dagger = \mathbf{U}^\top \mathbf{y}$, sendo $\mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ uma matriz de projeção para a geração de resíduos do ajuste obtido por mínimos quadrados ordinários de dimensão $[N \times (N - p)]$. A verossimilhança, neste caso, não depende dos efeitos fixos $\boldsymbol{\beta}$, nem da matriz \mathbf{U} (SINGER; NOBRE; ROCHA, 2018). Note que, $E(\mathbf{y}^\dagger) = \mathbf{0}$, $Var(\mathbf{y}^\dagger) = \mathbf{U}\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{U}^\top$ e $\mathbf{y}^\dagger \sim N_{N-p}(0, \mathbf{U}^\top \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{U})$. Logo, a função de log-verossimilhança marginal restrita é dada por

$$l_R(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{(N-p)}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})|) - \frac{(N-p)}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{1}{2} \log|\mathbf{X}^\top \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \mathbf{X}| \quad (8)$$

O estimador de máxima verossimilhança restrita de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido maximizando a equação anterior. Note que $l_R(\boldsymbol{\theta})$ se diferencia da função de log-verossimilhança padrão pelo termo $-\frac{1}{2} \log|\mathbf{X}^\top \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \mathbf{X}|$. Assintoticamente, a log-verossimilhança e log-verossimilhança restrita, bem como as respectivas matrizes de covariâncias coincidem (DEMIDENKO, 2004).

Uma propriedade peculiar do Modelo de Efeitos Lineares Mistos é a possibilidade de predições individuais mesmo se o número de observações de um indivíduo específico for menor que o número de parâmetros estimados (efeitos fixos). Essa propriedade é derivada da suposição de que cada indivíduo possui seu próprio parâmetro com média comum.

Assumindo que $\boldsymbol{\beta}$, σ^2 e \mathbf{D} sejam conhecidos, pode-se encontrar uma estimativa para o efeito aleatório \mathbf{b}_i a partir da esperança condicional de $\mathbf{b}_i | \mathbf{y}_i$. Usando a fórmula da média condicional, encontra-se a média a posteriori do efeito aleatório,

$$E(\mathbf{b}_i | \mathbf{y}_i) = \mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_i \mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top)^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \quad (9)$$

Assim, um estimador para o efeito aleatório (se $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{D} são dados) é

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_i \mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top)^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (10)$$

em que $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador de mínimos quadrados generalizados. Se $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ a estimativa é zero. Na prática, estimamos os efeitos aleatórios usando uma estimativa de \mathbf{D} . O estimador dos efeitos aleatórios da equação (10) é denominado Melhor Preditor Linear Não Viesado (*BLUP*).

2.2 CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DE MODELOS

Parte importante das análises com modelos mistos é a seleção do modelo. Nesta modelagem há dependência nas covariáveis, essa característica impacta na seleção do modelo mais bem ajustado, devido a redução da efetividade do tamanho da amostra, quantidade que afeta as propriedades teóricas da seleção de modelos, tal como ocorre com o Critério de Informação Baysiano (BIC), veja Schwarz (1978). A dependência também significa que os modelos mistos possuem tanto os parâmetros de uma regressão linear, quanto parâmetros de variância. Os dois parâmetros têm importâncias relativas diferentes nas análises de seleção do modelo. Por exemplo, se o interesse do estudo for predição, talvez seja mais relevante obter a estrutura regressão de forma mais acurada do que a de dependência (MÜLLER; SCEALY; WELSH, 2013).

Utiliza-se neste trabalho dois métodos de seleção que minimizam o critério de informação, amplamente utilizados na literatura, o Critério de Informação Akaike (AIC), também conhecido como mAIC para os modelos mistos (YAMANOUCHI, 2017) e o BIC.

De acordo com Müller, Scaely e Welsh (2013) o critério AIC é definido da seguinte forma:

$$mAIC = -2l(\hat{\theta}) + 2a_n(p + q), \quad (11)$$

Em que $a_n = 1$ ou $a_n = n/(n - p - q - 1)$, no caso finito. No pacote *lme* (\cdot) do R é utilizado o mAIC com $a_n = 1$. Além disso, p é o número de variáveis, q o número de parâmetros e $l(\hat{\theta})$ corresponde ao máximo da função log-verossimilhança.

O critério BIC, por sua vez, é definido como

$$BIC = -2l(\hat{\theta}) + \log(n)(p + q), \quad (12)$$

Em que n é o tamanho da amostra. Para escolher o melhor modelo, utiliza-se aquele com os menores valores em qualquer um dos critérios de mAIC e BIC.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção é realizada a análise do Índice de Desempenho dos Municípios goianos por meio da ferramenta estatística do modelo linear misto. Tendo em vista a especificação do modelo na seção anterior, a variável resposta deve apresentar distribuição normal. Assim, antes das estimações dos efeitos fixos e predição dos aleatórios, apresenta-se as características da variável resposta, o IDM dos municípios goianos, bem como o seu contexto social e econômico.

A crise econômica que iniciou no Brasil no segundo trimestre de 2014 correspondeu a mais intensa que o país vivenciou desde o período pós-Segunda Guerra Mundial⁴. Em dois anos houve retração de 8,33% do PIB (OREIRO, 2017). Antes da recessão, o país experimentou de 2007 a 2010, aceleração do crescimento econômico após flexibilização do tripé: metas declinantes de inflação, meta de superávit primário e câmbio flutuante. Contudo, a partir de 2011, ocorreu desaceleração da economia brasileira. Na tentativa de estimular a volta do crescimento econômico, o Governo Federal adotou a combinação de redução da taxa básica de juros, depreciação do câmbio e desonerações tributárias. Esta iniciativa surtiu efeito no curto prazo, do terceiro trimestre de 2012 ao segundo trimestre de 2014 houve aumento do ritmo da economia em 2,5%. Entretanto, do segundo trimestre de 2014, o crescimento econômico entrou em colapso, ocasionando queda abrupta dos investimentos e dos lucros privados. Somados a isso, houve necessidade de reestruturação da política macroeconômica com realinhamento de preços, que estavam represados, e recomposição fiscal, o que causou aumento da inflação e baixa capacidade de incentivos governamentais pela perda de espaço fiscal (OREIRO, 2017).

No âmbito dos municípios, a crise econômica suscitou em retrocesso do desenvolvimento municipal, como já apontado na introdução. Entende-se desenvolvimento como processo de transformações nas dimensões social, econômica, cultural e política (OLIVEIRA, 2021), ocorrendo de forma desigual, fortalecendo regiões mais dinâmicas em detrimento das menos dinâmicas (CORRÊA; SILVEIRA; KIST, 2019). Para analisar as condições como os municípios goianos passaram o período mais intenso da crise econômica nos diferentes aspectos que vão da economia a saúde, educação, infraestrutura e emprego, o IDM elaborado pelo Instituto Mauro Borges foi utilizado. A escolha desse indicador deve-se a capacidade de mensurar dimensões de desenvolvimento que a literatura identifica como essenciais para entender o conceito, além de ser calculado individualmente para os 246 municípios do estado de Goiás, permitindo visualizar as diferenças de desempenho.

O IDM verifica 37 indicadores que estão agrupados em seis dimensões, são elas: economia, trabalho, educação, saúde, segurança e infraestrutura. Cada uma das seis dimensões é calculada separadamente e para permitir comparações e mensurar o IDM geral, que corresponde a média aritmética das dimensões, elas são padronizadas por meio da seguinte equação (IMB, 2019):

$$I_{ij} = \frac{I_j - \text{Mínimo}(i)}{\text{Máximo}(i) - \text{Mínimo}(i)} * 10$$

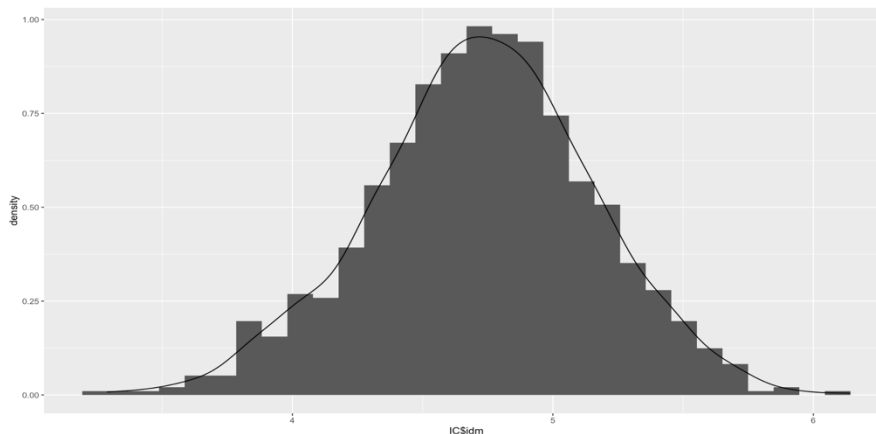
sendo,

- I_{ij} : Indicador padronizado da variável i para o município j ;
- I_j : valor observado da variável i para o município j ;
- $\text{Mínimo}(i)$: valor mínimo para a variável i ;
- $\text{Máximo}(i)$: valor máximo para a variável i .

⁴ Ressaltando que as análises deste trabalho são de período histórico anterior a pandemia da COVID-19 de 2020, que intensificou os problemas econômicos e sociais no Brasil derivados da crise econômica.

Por meio do histograma, Figura 1, observa-se forte indício de que a variável IDM possui distribuição normal, uma vez que a curva da densidade de probabilidade aproxima-se do formato de sino. Para obter mais evidências quanto a distribuição da variável foi realizado o teste Jarque-Bera. O teste é baseado nas mensurações de assimetria e curtose da amostra, tendo como hipótese nula a distribuição normal dos dados (THADEWALD; BÜNING, 2007).

Figura 1 – Histograma da variável Índice de Desempenho dos Municípios goianos



Fonte: Instituto Mauro Borges (2021)

Verifica-se pelo teste Jarque-Bera, Tabela 1, que não rejeitamos a hipótese de que IDM é normalmente distribuído. Assim, as análises sobre os efeitos das covariáveis no IDM, utilizando os modelos lineares mistos cuja variável resposta tem distribuição normal, podem continuar.

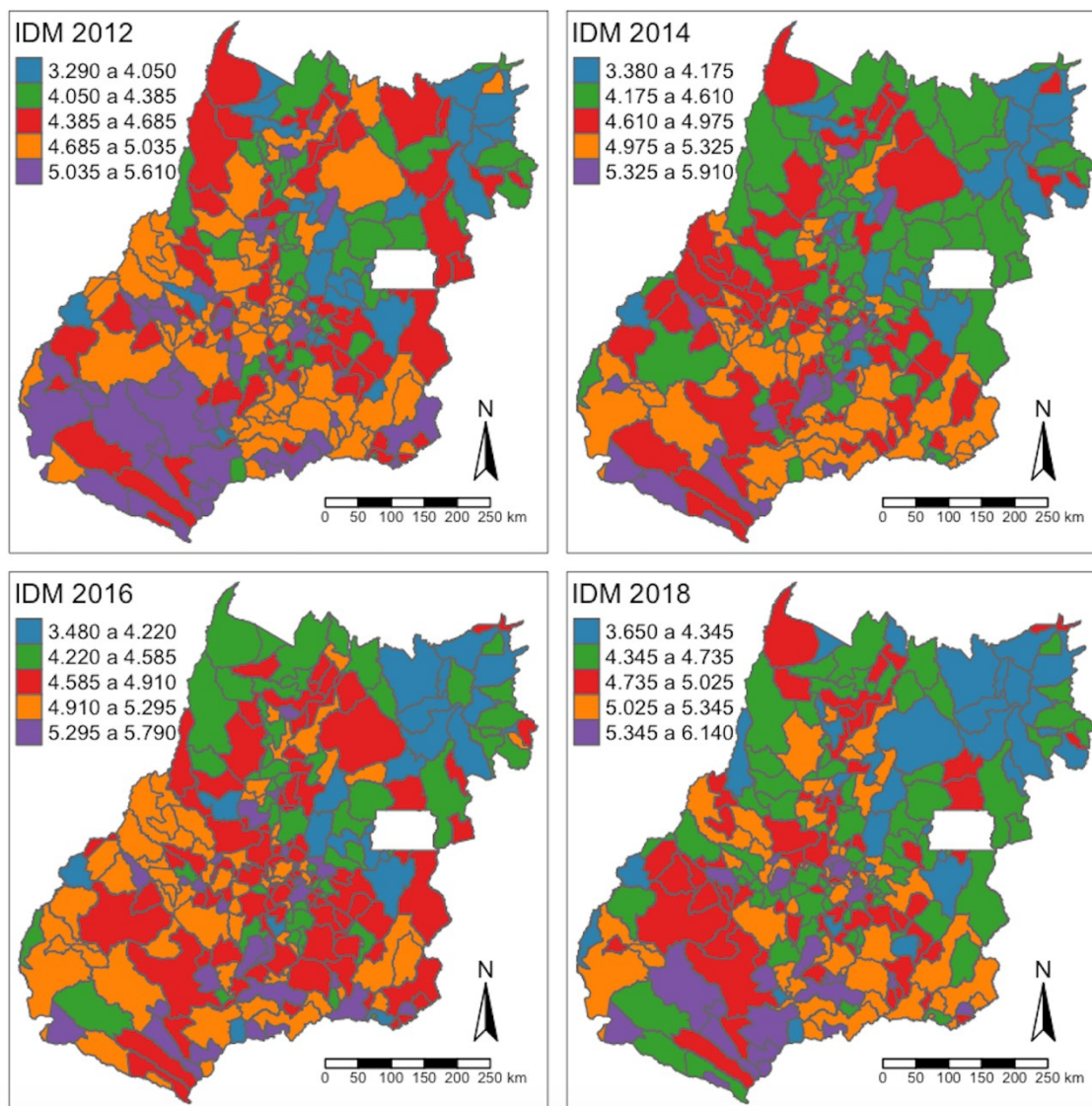
Tabela 1 – Teste Jarque-Bera

Teste Jarque-Bera			
	X-Square	df	p-valor
Jarque Bera Teste	2,7715	2	0,2501

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 2 abaixo demonstra o comportamento do IDM para os anos de 2012, 2014, 2016 e 2018. Os níveis de desempenho foram organizados por meio dos quantis do indicador, da mesma forma que o Instituto Mauro Borges sistematizou os resultados, totalizando cinco estratos.

Figura 2 – Índice de Desempenho dos Municípios por ano (2012, 2014, 2016 e 2018)



Fonte: Instituto Mauro Borges (2021)

No ano de 2012, a pontuação média do IDM dos municípios goianos foi de 4,62, podendo chegar a 10 pontos, e a dimensão econômica foi a que demonstrou os piores resultados médios (1,38 pontos). Outro ponto relevante dos resultados do IDM de 2012 foi que a maioria dos municípios com desempenho ruim em 2010 continuou com notas ruins, expondo a baixa capacidade de impulsionar desenvolvimento municipal em Goiás (IMB, 2014).

Em 2014 (Figura 2), observou-se piora da situação geral da maioria dos municípios do entorno de Brasília e do norte goiano. De modo geral, houve diminuição no número de municipalidades nos dois estratos mais altos do IDM, mas a média teve crescimento marginal de 4,62 para 4,71 pontos. A dimensão mais problemática do desenvolvimento municipal de Goiás continuou sendo a economia, enquanto saúde e segurança tiveram melhores performances.

Para o caso de 2016, não houve mudança na pior e nas duas melhores dimensões do IDM. Um ponto preocupante é que 50% dos municípios ficaram com pontuação abaixo da média geral (IMB, 2016). O último ano, 2018, evidencia a tendência de que boa parte dos municípios do Estado de Goiás possuem economia pouco significativa (IMB, 2019). Além disso, o IDM geral da maioria dos municípios encontra-se nos três piores quantis como pode ser visto na Figura 2.

Com o intuito de verificar determinantes do desempenho municipal em Goiás foram elencadas seis variáveis independentes, a saber: equilíbrio orçamentário, PIB per capita, número de matrículas escolares, cobertura da rede de telefonia fixa e internet, médicos por mil habitantes e empregos formais. Todas as variáveis foram coletadas no Banco de Dados Estatísticos do Instituto Mauro Borges e padronizadas da mesma forma que o IDM. A seguir, é apresentada breve fundamentação teórica da escolha de cada variável e as hipóteses dos impactos esperados das variáveis no Índice de Desempenho dos Municípios.

De acordo com Louzano et al. (2019), gastos públicos, principalmente, aqueles destinados as áreas sociais e de qualidade de vida, relacionam-se com melhoria dos indicadores de desenvolvimento. A Constituição Federal de 1988 conferiu aos municípios mais prerrogativas para se tornarem protagonistas do desenvolvimento local. Contudo, a capacidade limitada de gestão dos recursos somada às demandas locais reprimidas e falta de responsabilidade fiscal fizeram com que grande parte dos municípios sofressem forte pressão financeira, desequilibrando as contas públicas (DINIZ; MACEDO; CORRAR, 2012). Entende-se por equilíbrio orçamentário a correspondência entre receitas e despesas. Mais especificamente, numa situação de total equilíbrio, para satisfazer as necessidades públicas, os gastos governamentais são iguais aos recursos obtidos por meio da atividade de finanças (RIBEIRO, 1966).

Houve, no decorrer dos anos 2000, iniciativas de melhoria do planejamento e controle dos gastos públicos, como por exemplo, a Lei de Responsabilidade Fiscal. O objetivo do processo de aperfeiçoamento da gestão fiscal refere-se à aplicação mais eficiente dos escassos recursos orçamentários para o atendimento das demandas sociais e promoção do desenvolvimento (MARINHO; JORGE, 2015). Desta forma, a hipótese do comportamento da variável equilíbrio orçamentário em relação ao IDM é de que tenha efeito positivo.

O PIB per capita é amplamente utilizado pela literatura para verificar a evolução do desenvolvimento local, uma vez que mede a riqueza produzida numa localidade dividido por sua população (SILVA; BRITO; VIEIRA, 2019). Espera-se que o PIB per capita também tenha efeito positivo no Índice de Desempenho Municipal.

O acesso a educação corresponde a outro elemento que contribui para o desenvolvimento local. Na discussão sobre teoria do capital humano, a educação representa condição primordial para ampliar as habilidades e conhecimentos que resultam em melhora do desempenho de produtividade (SOUZA et al., 2014). Assim, foram coletadas o número de matrículas nos níveis fundamental, médio e superior de ensino nos 246 municípios de Goiás. A hipótese é de que a variável matrículas afete positivamente o IDM.

Uma pesquisa realizada pela Unicef, Itaú Social e Undime verificou que a conectividade com a internet foi um dos maiores desafios para as redes municipais de ensino no Brasil durante o ano de 2020, período que por causa da pandemia da COVID 19, as infraestruturas

educacionais e laborais tiveram que se adaptar a realidade de distanciamento social (ONU BRASIL, 2020). A conectividade dos municípios, mesmo os menores, tornou-se fundamental para a implementação de políticas públicas de acesso aos serviços públicos, bem como para a viabilidade do ambiente de negócios da iniciativa privada. O Brasil evoluiu no número de usuários de internet, porém, ainda há parte da população brasileira sem acesso a internet, principalmente, entre os mais pobres, pessoas acima de 60 anos e aqueles que vivem na zona rural (UNESCO, 2021). Portanto, supõe-se que a cobertura de telefonia fixa e internet tem impacto positivo no IDM.

A recomendação da Organização Mundial da Saúde (OMS) é de que haja no mínimo um médico por mil habitantes. Segundo o estudo Demografia Médica no Brasil 2020, temos 2,4 médicos por mil habitantes, ou seja, indicador acima do recomendado pela OMS. Mas, a desigualdade na oferta de serviços médicos continua no país, as regiões norte e nordeste apresentam índices menores em relação as demais regiões brasileiras. No estado de Goiás a média é inferior a nacional, com 2,28 médicos por mil habitantes. Além das disparidades regionais, há também diferenças de médicos trabalhando no setor público e privado, com concentração no privado (SCHEFFER et al., 2020). Tendo em vista as características da distribuição de médicos no Brasil, a hipótese é quanto maior o número de médicos por mil habitantes no município, melhor o IDM.

O emprego formal não está vinculado apenas a dinâmica do mercado de trabalho. Consiste num instrumento fundamental para os trabalhadores possuírem fonte regular de renda, bem como um conjunto de direitos e reconhecimento social. Políticas públicas locais de atração de investimentos e dinamização da economia, buscam como uma das metas principais a geração de empregos com carteira assinada, uma vez que há relação entre desenvolvimento e empregos formais (VARGAS, 2012). Por isso, a hipótese é de que o crescimento de novos postos de trabalho com carteira assinada nos quatro anos analisados proporcionam efeito positivo no IDM.

A Tabela 2 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis que foram incorporadas neste trabalho. Analisando apenas a mediana, chama atenção que 50% dos municípios goianos, numa escala de 0 a 10, estão abaixo de 0,650 pontos de PIB per capita e 0,047 de número de matrículas, o que corresponde a valores muito baixos para 123 municipalidades do estado de Goiás, reforçando o argumento do IMB (IMB, 2019) acerca da dinâmica econômica local preocupante, somado a isso, a distribuição desequilibrada do acesso ao ensino, principalmente, nos pequenos municípios goianos. A conectividade e o emprego formal também estão num patamar considerado ruim, não alcançando 25% da pontuação possível em cada uma das áreas. No que se refere as duas variáveis com melhores desempenhos, equilíbrio orçamentário e médicos por mil habitantes, a gestão fiscal municipal obteve mediana de 41,10% dos pontos. Ainda é um cenário ruim da situação orçamentária dos municípios de Goiás, necessitando de aperfeiçoamentos e auxílio dos entes mais estruturados da federação, como o governo estadual e federal. E por último, médicos por mil habitantes, apesar de uma situação satisfatória, em relação as outras variáveis, de acordo com Scheffer et al (2020), Goiás é o estado do Centro-Oeste com maior desigualdade entre distribuição de médicos na capital (Goiânia) e interior. Assim, há necessidade de políticas públicas de incentivo a interiorização da atividade médica.

Tabela 2 – Medidas de tendência central das variáveis do estudo

	Mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo
IDM	3,29	4,46	4,73	4,726	5,01	6,14
Equi. Orçamentário	0	3,53	4,11	4,524	5,803	10
PIB per capita	0	0,36	0,65	1,055	1,232	10
Matrículas	0	0,021	0,047	0,2	0,118	10
Telefone e internet	0	1,558	2,475	2,711	3,53	10
Médicos por mil hab	0	3,5	5,735	6,008	9,285	10
Emprego formal	0	1,1	1,53	1,866	2,25	10

Fonte: Instituto Mauro Borges (2021)

Apresentadas as variáveis independentes, em seguida os efeitos aleatórios são discutidos. No presente estudo, os municípios do estado de Goiás correspondem as unidades experimentais que são observadas em momentos diferentes, mais especificamente, em quatro anos distintos. A princípio, esta variável seria o único efeito aleatório do modelo. Realizou-se teste para verificar se ano também entraria como efeito aleatório. Na Tabela 3, o Modelo 1 corresponde apenas os municípios como efeito aleatório, já no Modelo 2, acrescenta-se a variável ano aos efeitos aleatórios. O resultado do teste da ANOVA indica que se deve inserir ano nos efeitos aleatórios, e por meio dos critérios de seleção de modelos, AIC e BIC, tem-se que o Modelo 2 tem ajuste melhor que o Modelo 1. Com a incorporação de ano, ressalta-se que os dois efeitos aleatórios são independentes entre si (ROCHA, 2017).

Tabela 3 – Teste de seleção dos efeitos aleatórios

	npar	AIC	BIC	LogLik	deviance	Chisq	Df	Pr(>Chisq)
Modelo 1	3	510,59	525,26	-252,26	504,59			
Modelo 2	4	428,02	447,59	-210,01	420,02	84,56	1	0,000

Fonte: Elaborado pelos autores

No que segue, verifica-se o comportamento das variáveis independentes em relação a variável IDM. O pacote *lmerTest* do software R apresenta os p-valores e a estatística t para os modelos mistos, permitindo verificar a significância estatística das variáveis que compõem os efeitos fixos.

Foram testados inicialmente dois modelos, um ajustado por Máxima Verossimilhança (ML) e o outro por Máxima Verossimilhança Restrita (MLR). Como discutido na seção 2.2, assintoticamente, as duas formas de estimação são equivalentes, como pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 – Modelos de estimação dos parâmetros dos efeitos fixos e predição dos efeitos aleatórios

	Modelo por ML				Modelo por MLR			
	Coef	Erro Padrão	Est. T	p-valor	Coef	Erro Padrão	Est. T	p-valor
(Intercepto)	4,097***	0,052	78,205	0,0000	4,098***	0,054	75,745	0,0000
Equi. Orçamentário	0,014**	0,006	2,106	0,045	0,014*	0,007	1,994	0,055
PIB per capita	0,036**	0,012	3,053	0,002	0,036**	0,012	2,988	0,003
Mátriculas	-0,068**	0,026	-2,572	0,011	-0,068**	0,027	-2,551	0,011
Telefone e internet	0,083***	0,01	8,156	0,0000	0,083***	0,01	8,119	0,0000
Médicos por mil hab	0,019***	0,003	5,622	0,0000	0,019***	0,003	5,532	0,0000
Emprego formal	0,105***	0,014	7,423	0,0000	0,105***	0,014	7,353	0,0000

Efeitos Aleatórios	
	Desvio Padrão
Municípios	0,246
Ano	0,019
Erro	0,207

Número de Observações: 984

Municípios: 246

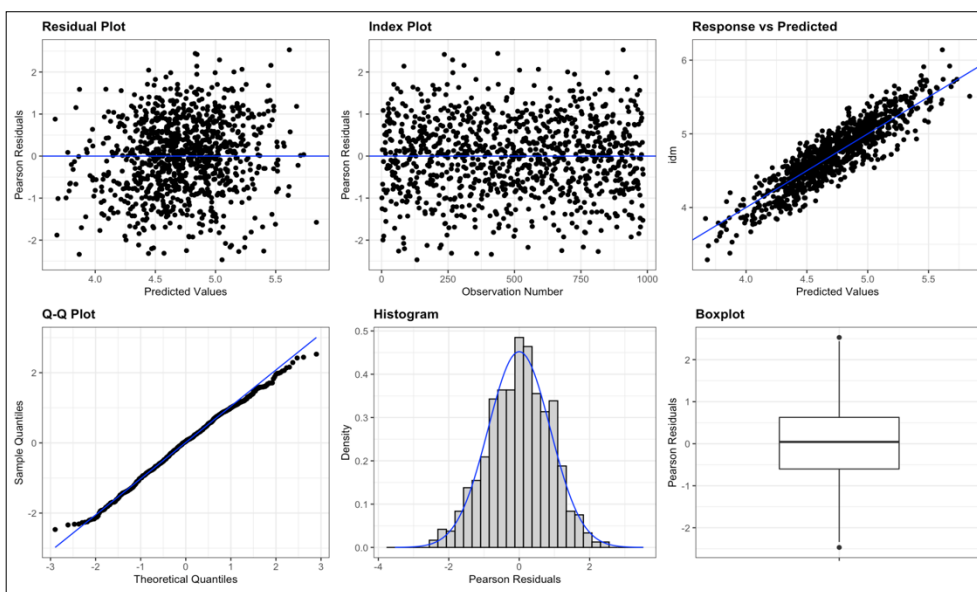
Anos: 4

Fonte: Elaborado pelos autores

Nota: *** $p < 0,001$; ** $p < 0,05$; * $p < 0,1$.

O modelo selecionado para empreender as análises foi o modelo por Máxima Verossimilhança Restrita, pois como argumenta Demidenko (2004), as estimativas da variância tendem a ser menos viesadas. Assim, realizou-se o diagnóstico do modelo selecionado. Note, por meio da Figura 3, que o modelo está bem ajustado, com resíduos apresentando as seguintes características: distribuição normal, nenhuma relação clara com os valores ajustados na estimação, nem diferença nas suas variações.

Figura 3 – Diagnóstico do modelo selecionado



Fonte: Elaborado pelos autores

Com a constatação de que o modelo escolhido está bem ajustado, discute-se os resultados das estimações. Pode ser observado que para o conjunto dos dados coletados dos municípios goianos no período histórico delimitado, bem como o modelo estatístico proposto, temos evidências suficientes de que as variáveis são estatisticamente significativas a um nível de significância estatística de 0,10.

Os resultados do modelo apontam o crescimento médio de 0,014 do Índice de Desempenho Municipal quando se aumenta em uma unidade o equilíbrio orçamentário e as demais variáveis constantes. Esse achado vai ao encontro da hipótese apresentada na discussão teórica, quanto a aplicação eficiente dos recursos orçamentários.

A variação média positiva do IDM também ocorre com o aumento unitário de PIB per capita, cobertura da rede de telefonia fixa e internet, médicos por mil habitantes e empregos formais com os respectivos coeficientes, 0,036, 0,083, 0,019 e 0,105. Da mesma forma que ocorreu com equilíbrio orçamentário, as hipóteses construídas para cada variável foram encontradas nos resultados com a exceção da variável número de matrículas.

No que se refere ao aumento em uma unidade das matrículas em instituições de ensino, o Índice de Desempenho Municipal diminuiu em média 0,068, indo no sentido contrário ao pressuposto teórico construído na exposição da variável. Cabem estudos mais específicos sobre as condições da escolaridade no estado de Goiás e os motivos que acesso a educação não estão gerando impulsos a processos desenvolvimentistas nos municípios goianos como se esperava a partir da qualificação de recursos humanos e da garantia ao direito social de formação escolar.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudos que analisam o desenvolvimento dos municípios e possuem base de dados com medidas repetidas demandam modelos estatísticos que consigam captar as variações entre os agrupamentos e dentro dos agrupamentos das unidades experimentais observadas. Desta forma, neste trabalho, o modelo de efeitos lineares mistos é utilizado para estudar a relação entre equilíbrio orçamentário, PIB per capita, número de matrículas escolares, cobertura da rede de telefonia fixa e internet, médicos por mil habitantes, empregos formais no comportamento do Índice de Desempenho dos Municípios do Estado de Goiás para todos os 246 municípios do estado em relação aos anos de 2012, 2014, 2016 e 2018. Como o modelo linear misto demanda normalidade na distribuição da variável resposta, o primeiro teste nos dados correspondeu ao atendimento do pressuposto teórico. Este é um dos principais desafios do uso desse tipo de ferramenta estatística, muitas vezes normalidade na distribuição dos dados não é encontrada. Caso isso ocorra, verificar a possibilidade de transformações na variável IDM, o que demandaria cuidados na hora de analisar os resultados, ou aplicar modelo linear generalizado misto em que há ampliação do requisito de distribuição da variável resposta para as pertencentes à família exponencial, tais como: Poisson, binomial, a própria normal, normal inversa, gama e binomial negativa.

Comparando os quatro anos selecionados, percebe-se que no ano de 2018 número menor de municípios nos dois estratos mais altos do IDM, o que demonstrou obstáculos para as municipalidades manterem o desempenho de desenvolvimento nos anos analisados, o fator economia foi o que mais contribuiu para a piora do indicador. Para verificar como as variáveis, principalmente, da dimensão econômica impactaram o Índice de Desempenho dos Municípios

o trabalho utilizou um ajuste com duas fontes de variação, as variáveis município e ano foram incorporadas como efeitos aleatórios. Em muitos estudos com modelos mistos, observamos o emprego de apenas uma variável como efeito aleatório. Contudo, há possibilidade de usarmos mais de uma, sendo essas variáveis independentes entre si (ROCHA, 2017). Ao pesquisador cabe realizar os testes para confirmar quantos efeitos aleatórios são reunidos no modelo.

Como esperado, observou-se que as estimativas usando os métodos de máxima verossimilhança e máxima verossimilhança restrita são equivalentes assintoticamente, a estimativa dos efeitos fixos ficara bastante próximas comparando os dois métodos, da mesma forma pode ser observado sobre os efeitos aleatórios.

O diagnóstico do modelo final atendeu as exigências teóricas de normalidade da distribuição dos resíduos, homocedasticidade, bem como não possuir relação clara com os valores ajustados na estimativa. Expondo que a metodologia escolhida para modelagem dos dados atendeu aos pressupostos teóricos.

Após a especificação da ferramenta estatística observou-se que no período de experiência do maior tempo de crise econômica no Brasil, o equilíbrio orçamentário, PIB per capita, instalação de infraestrutura de telefone e internet, distribuição de médicos por mil habitantes e emprego formal tiveram impactos positivos no desenvolvimento, mesmo que baixo, dos municípios goianos. Ponto que chamou atenção dos resultados foi o coeficiente negativo do número de matrículas no desenvolvimento municipal em Goiás. A literatura trabalha com o argumento de que acesso ao ensino é propulsor do desenvolvimento. Desta forma, sugere-se pesquisa específica para analisar no contexto histórico de 2012 a 2018 como estava estruturada a rede de ensino no estado de Goiás e o impacto dessa variável no desenvolvimento local.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, F. H. A crise econômica de 2014/2017. **Estudos Avançados**, v. 31, p. 51–60, abr. 2017.

CALEIRO, J. **Os 8 estados que mais sofreram com a crise econômica no Brasil.**

Disponível em: <https://exame.com/economia/os-8-estados-que-mais-sofreram-com-a-crise-economica-no-brasil/>. Acesso em: 17 set. 2021.

CORRÊA, J. C. S.; SILVEIRA, R. L. L.; KIST, R. B. B. Sobre o conceito de desenvolvimento regional: notas para debate. **Revista Brasileira de Gestão e Desenvolvimento Regional**, v. 15, n. 7, 31 dez. 2019.

DEMIDENKO, E. **Mixed models: theory and applications.** New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

DINIZ, J. A.; MACEDO, M. A. DA S.; CORRAR, L. J. Mensuração da eficiência financeira municipal no Brasil e sua relação com os gastos nas funções de governo. **Gestão & Regionalidade**, v. 28, n. 83, 7 set. 2012.

DUARTE, P.; LAMOUNIER, W.; TAKAMATSU, R. T. Modelos econométricos para dados em painel: aspectos teóricos e exemplos de aplicação à pesquisa em contabilidade e finanças. Congresso USP de Controladoria e Contabilidade. **Anais [...]**. São Paulo: USP, 2007.

FIRJAN, F. DAS I. DO E. DO R. DE J. **IFDM 18: Índice Firjan de desenvolvimento municipal**. Rio de Janeiro: Sistema FIRJAN, 2018.

HARVILLE, D. A. Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems. **Journal of the American Statistical Association**, v. 72, n. 358, p. 320–338, 1977.

IMB, I. M. B. **Índice de Desempenho dos Municípios Goianos IDM - 2012**. Goiânia: IMB, 2014.

IMB, I. M. B. **Índice de Desempenho dos Municípios Goianos IDM - 2016**. Goiânia: IMB, 2016.

IMB, I. M. B. **Índice de Desempenho dos Municípios Goianos IDM - 2018**. Goiânia: IMB, 2019.

LAIRD, N. M.; WARE, J. H. Random-Effects Models for Longitudinal Data. **Biometrics**, v. 38, n. 4, p. 963, dez. 1982.

LOUZANO, J. P. DE O. et al. Causalidade de Granger do índice de desenvolvimento socioeconômico na gestão fiscal dos municípios brasileiros. **Revista de Administração Pública**, v. 53, p. 610–627, 15 jul. 2019.

MARINHO, A. P. S.; JORGE, M. A. O planejamento local é mais eficiente? Uma análise de 14 municípios sergipanos de pequeno porte. **Nova Economia**, v. 25, p. 123–142, abr. 2015.

MELO, T. F. DO N. **Refinamentos para testes de hipóteses em modelos lineares mistos e modelos lineares com erros nas variáveis**. 2009. Tese (Doutorado em Estatística) - São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009.

MÜLLER, S.; SCEALY, J. L.; WELSH, A. H. Model Selection in Linear Mixed Models. **Statistical Science**, v. 28, n. 2, 1 maio 2013.

NOBRE, J. S. **Métodos de Diagnóstico para Modelos Lineares Mistos**. 2004. Dissertação (Mestrado em Estatística) - São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004.

OLIVEIRA, N. M. Revisitando algumas teorias do desenvolvimento regional Revising classical regional development theories. **Informe GEPEC**, v. 25, n. 1, p. 203–219, 7 jan. 2021.

ONU BRASIL. **Pesquisa aponta que acesso à internet foi maior dificuldade para redes municipais de educação em 2020 | As Nações Unidas no Brasil**. Disponível em: <https://brasil.un.org/pt-br/115999-pesquisa-aponta-que-acesso-internet-foi-maior-dificuldade-para-redes-municipais-de-educacao>, <https://brasil.un.org/pt-br/115999-pesquisa-aponta-que->

acesso-internet-foi-maior-dificuldade-para-redes-municipais-de-educacao. Acesso em: 17 set. 2021.

OREIRO, J. L. A grande recessão brasileira: diagnóstico e uma agenda de política econômica. **Estudos Avançados**, v. 31, p. 75–88, abr. 2017.

PATTERSON, H. D.; THOMPSON, R. Recovery of Inter-Block Information when Block Sizes are Unequal. **Biometrika**, v. 58, n. 3, p. 545–554, 1971.

RIBEIRO, R. Equilíbrio orçamentário: Aspectos sociais e econômico-financeiros. **Revista do Serviço Público**, v. 98, p. 56–67, 1966.

ROCHA, A. **Modelos lineares mistos: uma abordagem baysiana**. 2017. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Brasília: Universidade de Brasília, 2017.

SCHEFFER, M. et al. **Demografia médica no Brasil 2020**. São Paulo: Departamento de Medicina Preventiva da Faculdade de Medicina da USP, Conselho Federal de Medicina, 2020.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.

SILVA, R. F. G.; BRITO, L. A. P. F. DE; VIEIRA, E. T. Crescimento econômico e desenvolvimento econômico: uma análise pelo índice FIRJAN e PIB per capita do município de São José dos Campos – SP. **Gestão e Desenvolvimento em Revista**, v. 5, n. 2, p. 59–68, 2019.

SINGER, J. M.; NOBRE, J. S.; ROCHA, F. M. M. **Análise de dados longitudinais: Versão parcial preliminar**. Em produção, 2018. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~jmsinger/doku.php>.

SOUZA, D. L. DE et al. Acesso à Educação Superior e Desenvolvimento Regional: Como esses construtos se relacionam? **Gestão & Regionalidade**, v. 30, n. 89, 26 set. 2014.

SOUZA, L. P. DE; TEIXEIRA, E. C.; TUPY, I. S. Influência do benefício de prestação continuada sobre a taxa de pobreza dos idosos nos municípios mineiros no período 2014-2017. **DRd - Desenvolvimento Regional em debate**, v. 11, p. 89–113, 11 maio 2021.

THADEWALD, T.; BÜNING, H. Jarque–Bera test and its competitors for testing normality: a power comparison. **Journal of Applied Statistics**, v. 34, n. 1, p. 87–105, 1 jan. 2007.

UNESCO. **Avaliação do Desenvolvimento da Internet no Brasil: usando os indicadores de universalidade da Internet DAAM-X**. Brasília: UNESCO BRASIL, 2021.

VARGAS, F. E. B. Emprego e desenvolvimento regional: contornos de uma questão social. **Revista da ABET**, v. 11, 2012.

VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G. **Linear mixed models for longitudinal data**. Corr. 2. print ed. New York Berlin Heidelberg: Springer, 2000.

WARE, J. H. Linear Models for the Analysis of Longitudinal Studies. **The American Statistician**, v. 39, n. 2, p. 95, maio 1985.

YAMANOUCHI, T. **Seleção de modelos lineares mistos utilizando critérios de informação**. 2017. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, 2017.